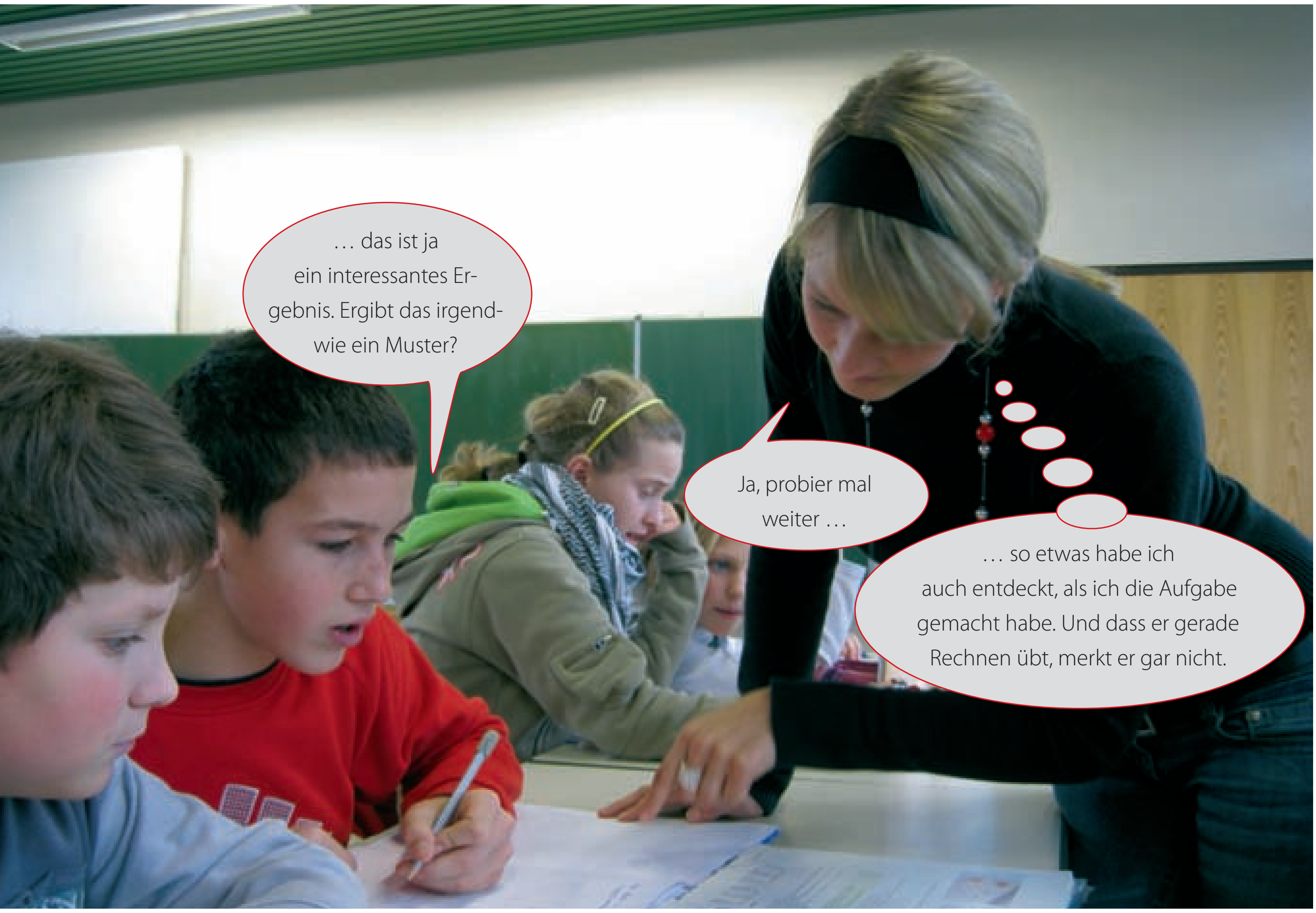
Timo Leuders

Intelligent üben und Mathematik erleben

Üben kann eine abwechslungsreiche Sache sein, wenn es nicht nur darum geht, mit Aufgabenpäckchen Fertigkeiten zu trainieren, sondern wenn das Üben Hand in Hand geht mit mathematischen Entdeckungen und Reflexionen.

In intelligenten Übungsaufgaben werden Vorstellungen gefestigt und mathematische Begriffe und Verfahren reflektiert. Schülerinnen und Schüler untersuchen mathematische Strukturen, lösen einfache mathematische Probleme und üben dabei ganz selbstverständlich Grundfertigkeiten.

Woher aber nimmt man solche intelligenten Übungsaufgaben, wenn sie nicht schon in Schulbüchern stehen? Die Konstruktion solcher Aufgaben für den eigenen Unterricht ist keine Überforderung für Lehrerinnen und Lehrer, sondern ein leicht zu erlernendes Handwerk, ja sogar ein Anlass, als Lehrerin oder Lehrer selbst wieder auf mathematische Entdeckungsreise zu gehen.



Kinder und Lehrer entdecken Mathematik – beim Bearbeiten und Erstellen von produktiven Übungsaufgaben

So kann es aussehen …

Übungsaufgaben gibt es in Schulbüchern zuhauf. Wie es aussieht, wenn man kreativ mit ihnen umgeht, zeigen die folgenden Beispiele. So wie hier sahen die Übungsaufgaben im Schulbuch vorher aus:

1 Berechne die Durchschnittswerte
a) 157 cm und 168 cm
b) 45 kg, 50 kg und 50 kg
c) 12 Jahre, 14 Jahre und 19 Jahre
d) […]

2 a) Sven wollte bei der viertägigen Klassenfahrt am Tag im Durchschnitt nicht mehr als 10 € ausgeben. Er hat 9,85 €; 6,85 €; 8,35 € und 13,05 € ausgegeben. Berechne, ob er seine Absicht eingehalten hat:
b) […]

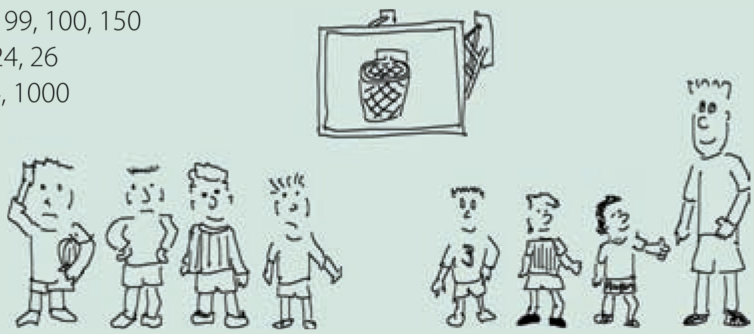
3 Berechne jeweils den Durchschnitt
a) 1, 2, 3, 4, 5
b) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10
c) 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0
d) 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19
e) der ersten 10 Primzahlen
f) […]

Und so können sie aussehen, wenn man sie intelligent weiterentwickelt.

1 Schätzen und Rechnen
a) Schätze zuerst den jeweiligen Durchschnitt der Daten.

Tipps:
- Stelle dir jede Zahlengruppe erst auf einer Zahlengerade eintragen vor.
- Stelle dir vor, dass eine entsprechende Menge Geld gleichmäßig aufgeteilt wird.

1) 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 30, 30, 30, 30, 30, 30, 30, 30, 30, 30
2) 300, 450, 600
3) 50, 101, 99, 100, 150
4) 23, 25, 24, 26
5) 1, 2, 3, 4, 1000
6)



b) Überprüfe deine Schätzung durch Rechnung.
c) Schreibe in eigenen Worten auf, was du aus den Beispielen gelernt hast.

2 Zwillinge

Karl und Johannes sind Zwillinge, aber sich ganz und gar nicht ähnlich. Hier sind ihre errechneten Durchschnittswerte.
Wie groß, wie schwer und wie alt könnten sie sein?
Gib bei jeder Aufgabe mehrere Möglichkeiten an.
Zur Überprüfung deiner Ergebnisse tausche mit deinem Nachbarn.

a) Durchschnittliche Größe: 155 cm
b) Durchschnittliches Gewicht: 45 kg
c) Durchschnittliches Alter: 12 Jahre 25 Tage 8 Stunden
d) Durchschnittliche Augenfarbe: Graublau
e) Durchschnittliches Taschengeld: 12 €
f) Nun nimm an, es wären keine Zwillinge, sondern Drillinge.

Bearbeite die Aufgaben a) – e) noch einmal.

3 Schubladenschränke

(1)

(2)

(3)

(4)

(5)

(6)

a) Berechne jeweils den Durchschnitt der Zahlen in jeder Schublade.
Schreibe auch auf, was dir bei jedem Schrank auffällt.
b) Erkläre alle Entdeckungen, die du in a) gemacht hast.
c) Erfinde ähnliche, eigene Schubladenschränke und lass sie von deinem Nachbarn untersuchen.

Was dahinter steckt …

Klarheit über die Ziele von Üben!

Dass man mathematische Fähigkeiten nicht nur erwerben, sondern auch üben muss, ist unstrittig. Aber wie sollen solche Übungsformen aussehen? Was bedeutet es, das Üben „produktiv“, „intelligent“ oder „reflexiv“ zu gestalten (alle Bezeichnungen werden meist im selben Sinne gebraucht) und wie gelingt

dies?
Die Aufgabenvariante 1 auf S. ### ist jedenfalls eine, wie sie uns hundertfach in Schulbüchern entgegentritt. Ihr liegt ein bestimmtes Verständnis von Mathematiklernen zu Grunde, das man vielleicht so beschreiben könnte:

> „Bevor Schülerinnen und Schüler Mathematik betreiben können, müssen sie sich erst einmal bestimmte Fertigkeiten und Kenntnisse aneignen. Das geschieht durch Wiederholung und langsames Erhöhen der Schwierigkeit."

Diese Auffassung geht einher mit einer typischen Strukturierung von Lernprozessen:

> „Das Erarbeiten von mathematischen Begriffen wird getrennt von der Übung und Anwendung dieser Begriffe. Das Erstere geschieht unter sanfter Begleitung des Lehrers, das Zweite ist die Übepflicht des Schülers."

Eine solche (hier etwas überzeichnet dargestellte) Sicht auf das Üben könnte man kennzeichnen durch Begriffe wie „Vorratslernen" und „Üben als Krafttraining". Wird das Üben im Unterricht nach diesen Maximen gestaltet, wird es zu einer trockenen, für Lernende wie Lehrende verdrießlichen Angelegenheit, die noch dazu allzu oft in die Hausaufgabe abgeschoben wird.

Wie entrinnt man dieser engen Übephilosophie? Bevor es darum geht, wie man üben kann, sollte man einmal in den Blick nehmen, was alles geübt werden kann. Sicherlich sind abrufbare Kenntnisse und die fehlerfreie Ausführung von Verfahren nur ein kleiner Bestandteil hiervon.

Was man alles Üben kann …

Fähigkeitsaspekt	**am Beispielthema „Durchschnitt"**
Kenntnisse	die Definition des Durchschnittes in eigenen Worten wiedergeben
Fertigkeiten	einen Durchschnitt fehlerlos berechnen (mit oder ohne Taschenrechner)
Verstehen/Vorstellungen	am Beispiel/an einem Bild erläutern, was ein Durchschnitt ist
Anwendungsfähigkeit	in unbekannten Situationen Probleme mit Hilfe von Durchschnitten lösen
(übergreifende) Strategien	sich in einer unbekannten Situation, bei der um die „Mitte" geht, zu helfen wissen, z. B. durch Betrachten von Beispielen …
Reflexionsfähigkeit	beurteilen, ob es in einer bestimmten Situation sinnvoll ist, einen Durchschnitt zu berechnen
Einstellungen	… und auch dazu bereit sein.

Das Üben hat zum Ziel, all diese Fähigkeitsaspekte zu fördern, und zwar alle gleichermaßen und nicht in irgendeiner Hierarchie. Zu den wohl gröbsten Missdeutungen einer solchen Einteilung in Ziele des Übens gehört, dass die verschiedenen Fähigkeitsaspekte in Stufen aufeinander aufbauen müssten, dass sie eine Schwierigkeitssteigerung bedeuten und dass man schwächere Schüler allenfalls durch Übungen auf der ersten oder zweiten Stufe fördern könne.

Gewiss sind beispielsweise bestimmte Grundfertigkeiten Voraussetzungen für die Anwendungsfähigkeit (etwa allgemeine Rechenfertigkeiten mit Dezimalzahlen für die Anwendung des Durchschnittes in realistischen Situationen). Bezogen auf *ein* Thema muss man jedoch fordern, dass *alle* Schüler auf *allen* Fähigkeitsaspekten lernen und folglich üben müssen. Tatsächlich lassen sich zu allen Aspekten leichte und schwierige, elementare und vertiefende Übungen erzeugen.

Die umgearbeiteten Übungsvarianten S. ### zeigen dies am konkreten Beispiel:
- Aufgabe 1 soll vorstellungsbezogen das Verständnis des Durchschnittes vertiefen
- Aufgabe 2 festigt die Kenntnis der Struktur der Durchschnittbildung und verbindet dies mit einer Reflexion über den Sinn von Durchschnittbildungen
- Aufgabe 3 unterstützt das Üben der Rechenfertigkeit, ermöglicht aber zugleich die Entdeckung weitergehender Zusammenhänge

Dieses letzte Beispiel weist bereits auf weitere Aspekte intelligenten Übens hin, die im Folgenden näher beschrieben werden.

Wie sehen gute Übungsaufgaben aus?

Über die Zielgemäßheit hinaus gibt es noch eine Reihe weiterer Kriterien, die an gute Übungsaufgaben gestellt werden (vgl. auch Wittmann/Müller 1990/92; Selter 1995; Leuders 2005; Leuders/Wittmann 2006; Bruder 2008):

Intelligentes Üben ist	
sinnstiftend	Dem Übenden wird möglichst transparent gemacht, wozu die Übung dient: „Was kann man durch die Übung besser verstehen? Wozu kann man die Fähigkeit anwenden?“
entdeckungsoffen	Das Üben ist nicht auf das lineare Abarbeiten von vorgezeichneten Tätigkeiten beschränkt. Die Aufgaben regen an, schon beim Üben mathematisch tätig zu sein, eigene Wege zu gehen, Entdeckungen zu machen, die über das enge Übeziel hinausgehen.
selbstdifferenzierend	Die Aufgabenstellungen sind so formuliert, dass starke und schwache Schüler mit ihnen arbeiten können. Jeder Schüler kann auf seinem Niveau Nutzen aus den Übungen ziehen.
reflexiv	Die Aufgaben regen immer auch zum Nachdenken über den Gegenstand der Übung oder über seine Übungstätigkeit an.

Nach dieser Auffassung sollte beispielsweise das Automatisieren von Fähigkeiten niemals allein im Vordergrund stehen, sondern immer auch dazu angeregt werden, die Begriffe und Verfahren in ihrer Bedeutung zu sehen, sie näher zu verstehen und zu reflektieren.

All dies klingt in seiner Ballung zunächst nach einer Überforderung der Schülerinnen und Schüler und nach einer Überlastung des Unterrichts. Dies erscheint aber nur auf den ersten Blick so. Intelligentes Üben ist nicht zu verwechseln mit „Üben für Intelligente“, sondern es ist eine Übungsform, die alle Schülerinnen und Schüler erreichen soll. Das zeigt die Aufgabe 3 (S. ###) besonders deutlich. Diese Aufgabe regt zum Entdecken von Strukturen an, spricht dabei aber Schüler jeder Leistungsstufe an. Weniger leistungsstarke Schüler sehen vielleicht vorab keinerlei Struktur, sie rechnen die Durchschnitte aus und sind ganz froh, wenn sie erkennen, dass beispielsweise die Ergebnisse eines Päckchens dieselben sind. Stärkere Schüler versuchen die Päckchenstruktur genauer zu erfassen und vielleicht auch dazu zu verwenden, möglicherweise falsche Ergebnisse daran zu identifizieren, dass sie unerwartete Ergebnisse zeitigen. Noch stärkere Schüler wiederum versuchen die Struktur der Päckchen und der Ergebnisse aufeinander zu beziehen: „Warum kommt bei Aufgabe 3, Nr. (5) jedes Mal zwei mehr heraus?“

Das Üben von Fertigkeiten, das Reflektieren von Begriffen, das Untersuchen von Strukturen, das Lösen von Problemen – all dies kann in Übungsaufgaben angesprochen werden, die sowohl für starke wie schwache Schülerinnen und Schüler zugänglich sind. Man spricht hier auch von „natürlicher“ Differenzierung.

Intelligente Übungsaufgaben selbst gemacht!

Wie findet man nun im Schulalltag solche intelligenten Übungsaufgaben? Wenn der Blick erst einmal durch Kriterien geschärft ist, sieht man auch in traditionellen Schulbüchern eine ganze Reihe guter Übungen. Im Buch, dem das Ausgangsbeispiel zur Durchschnittbildung entnommen ist, findet man beispielsweise diese Aufgabe:

5 a) Suche zu 9 und 13 noch eine Zahl, sodass der Durchschnitt 10 beträgt.
b) Suche zu 36 und 24 noch eine Zahl, sodass der Durchschnitt 20 beträgt

6 Christine steht nach drei Klassenarbeiten in Mathematik auf der Note „3".
Welche Noten kann sie geschrieben haben?

Beide Aufgaben enthalten Elemente, die zum problemlösenden und reflektierenden Üben anregen. Interessanterweise wird die Aufgabe 6 durch eine Glühbirne gekennzeichnet, die nach Aussage der Herausgeber des Schulbuches bedeutet: „fördert allgemeine Kompetenzen." – gemeint ist wohl vor allem das Problemlösen. Es gibt jedoch keinen Grund, dass das Problemlösen erst nach dem Einüben von Fertigkeiten in Angriff genommen wird. *Alle* Schülerinnen und Schüler sind in der Lage, von Anfang an die Durchschnittsbildung in solchen einfachen Problemkontexten zu bearbeiten. Sie benötigen dazu keine höheres Abstraktionsvermögen, sondern zunächst einmal nur die Bereitschaft, sich den offeneren Frage in 5 und 6 durch Ausprobieren und Berechnen von Beispielen zu nähern. Eine solche Problemlösebereitschaft ist eine fundamentale Problemlösekompetenz, die man nur dadurch fördert, dass man sie von Anfang an einfordert und den Schülern zutraut.

Der erste Weg zu intelligenten Übungsaufgaben ist also die Suche und Auswahl von guten Beispielen im eingeführten Buch. Ein darüber hinaus gehender Schritt kann in der sanften Veränderung der im Buch angebotenen Aufgaben bestehen. Dies funktioniert besonders leicht bei so genannten „grauen" Aufgabenpäckchen, also Aufgabenfolgen, die zunächst keinen inneren Zusammenhang (außer den der steigenden Schwierigkeit) besitzen. Statt den Schülerinnen und Schülern nun etwa „Aufgabe 1 a) bis d) und f)" aufzutragen, kann die Aufgabenstellung lauten:

1 ~~Berechne jeweils den Durchschnitt~~
a) 1, 2, 3, 5, 6, 7
b) 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
c) 1, 1, 1, 10
d) […]

2 Welche Aufgabe hat das größte Ergebnis? Überlege zuerst, überprüfe dann.

Die Aufgabe wird also schlicht durch Hinzufügen einer Reflexionsaufforderung produktiv gemacht (Leuders 2006). Die hinzugefügte Frage kann auch lauten:

3 Bringe die Aufgaben – ohne zu rechnen – in eine Reihenfolge, der kleinste Durchschnitt zuerst. Begründe deine Reihenfolge. Überprüfe durch Rechnung oder Argumentieren.

Solche reflexionsanregenden Fragen fügen der Aufgabe eine Problemstruktur hinzu, die für stärkere Schüler eine zusätzliche interessante Herausforderung bedeutet, ohne dass schwächere Schüler hier ausgeschlossen wären. Das Üben der Rechenfertigkeiten ist – weiterhin – je nach Art der Formulierung der Aufgabenstellung – expliziter oder impliziter Bestandteil der Aufgabe.

Schließlich kann man aber nicht jede Aufgabe so einfach von anderer Stelle „borgen“ und um Reflexionsragen ergänzen. Dann braucht man Techniken, mit denen man geeignete Übungsaufgaben für die anstehende Übungsphase systematisch erzeugt. Die nun folgenden Beispiele sollen zeigen, dass die hier genannten Merkmale sich auf ganz einfache Weise und ohne übermäßigen Aufwand bei der täglichen Unterrichtsvorbereitung verwirklichen lassen.

… selbst gemacht! – aber mit Methode!

Descartes war zeitlebens auf der Suche nach „der Methode“, dem sicheren Weg zum Erkenntnisgewinn. So etwas haben wir nicht zu bieten, ein Algorithmus zur guten Übungsaufgabe ist wohl eitle Illusion. Wohl aber gibt es eine Reihe von rationalen Schritten und so etwas wie einen Werkzeugkasten, der es möglich macht, gute Aufgaben mit ein wenig Nachdenken und Geschick zu erstellen. Die knappste Fassung dieses Werkzeugkastens zeigt die Tabelle auf S. ###, deren Verwendung nachfolgend an Beispielen illustriert wird.

Schritt 1: Bevor man ans Konstruieren geht, braucht man erst einmal Klarheit darüber, welche Ziele man anstrebt. Hier beantwortet man sich beispielsweise die folgenden Prüffragen:

Prüffragen vorher: Welches ist die Tätigkeit, die geübt werden soll?

- Das Wiedergeben von Wissen (Zusammenhänge, Bezeichnungen, …) – wenn ja: Welche?
- Das Ausführen von Verfahren – wenn ja: Welches?
- Das Anwenden von Begriffen – wenn ja: Welche und auf welche Weise?
- Das Herstellen von Beziehungen – wenn ja: Welche?
- …

Die größte Gefahr beim Konstruieren von Aufgaben besteht nämlich darin, von seinen Zielen abzukommen und nur „schöne Aufgaben“ zu entwickeln. Gerade als Mathematiklehrerinnen und -lehrer erliegen wir allzu leicht der Versuchung, zu fragen, was man „noch alles fragen“ könnte. Dann hat man danach zwar viele interessante Aufgaben, zumeist aber das Übungsziel aus den Augen verloren und, was vielleicht noch schwerer wiegt, die schwächeren Schüler abgehängt.

Schritt 2: Nach der Vergewisserung über die Ziele, darf man kreativ werden, was aber nicht bedeutet, dass man auf Eingebungen warten müsste. Eingebungen kann man nicht erzwingen, wohl aber mit Hilfe so genannter Kreativitätstechniken eine Unmenge Ideen herauskitzeln. Eine solche Technik, die beim Aufgaben erstellen sehr fruchtbar, ist lautet:

- Variiere die Situation (hier also: die Aufgabe)

Damit man aber nicht ins Ungewisse hinein transformiert, kann man sich einer anderen Kreativitätstechnik bedienen.

- Wende der Reihe nach eine Reihe von „Variationstechniken“ auf die Ursprungsaufgabe an.

Diese Variationstechniken sind in der Tabelle ab S. ### zusammengefasst. Die Anregungen, Aufgaben zu variieren, geht auf Schupp (2002) zurück – bei ihm geht es allerdings darum, dass Schülerinnen und Schüler Aufgaben variieren und damit neue mathematische Zusammenhänge entdecken. Die hier vorgeschlagenen Variationstechniken unterscheiden sich (ein wenig, aber nicht völlig) dadurch von denen Schupps, dass es hier um eine „Variation im Dienste der didaktischen Erfindung“ geht, also um das Erzeugen von neuen Übungsaufgaben durch die Lehrperson.

Schritt 3: Was tun Sie nun mit all den Aufgaben, die Sie erzeugt haben? Eigentlich sind es ja viel zu viele! Und außerdem sind sie noch lange nicht ausgereift. Sie haben sicher bemerkt, dass die Anwendung der Techniken nicht immer zu überzeugenden Resultaten führt. Daher ist es jetzt angemessen, wieder Prüffragen zu stellen:

Prüffragen nachher: Regt die Aufgabe an, die Zieltätigkeit
• möglichst oft auszuführen? (Effektivität) • auf verschiedenen Niveaus auszuführen? (Differenzierung) • operativ durchzuarbeiten? (Flexibilität) • beim Ausführen zu reflektieren? (Verständnis)

Natürlich muss nicht jede Aufgabe alle Kriterien erfüllen. Wenn Sie aber Zweifel an der Eignung einer der entstanden Aufgaben haben, dann versuchen Sie sie noch einmal zu verbessern, z. B. durch folgende „Nachbesserungen“:

Aufgaben optimieren …	
Effektivität optimieren	Verändern Sie die Aufgabenstellung, dass Schüler auf jeden Fall mehrere Beispiele bearbeiten müssen, z. B. durch direkte Aufforderung.
Differenzierung optimieren	Stellen Sie sicher, dass schwächere Schüler die Aufgabenstellung sofort verstehen können. Gegebenenfalls stellen sie eine einfachere, geschlossenere Einstiegsaufgabe mit Beispielcharakter voran.
Flexibilität optimieren	Formulieren Sie die Aufgabe so, dass es sich lohnt, auch einmal vom Ergebnis her zu denken, oder einen Wert systematisch durchzuprobieren. Gegebenenfalls fordern Sie explizit dazu auf.
Reflexivität optimieren	Öffnen Sie die Aufgaben ggf. noch ein wenig dafür, dass Schüler Entscheidungen treffen können. Oder lassen Sie ein Phänomen verbal beschrieben, vergleichen, begründen etc …

Tabelle: Techniken für das Erzeugen produktiver Übungsaufgaben:

Aufgabentyp: Probleme lösen	**Fragetyp**		**Aufgabenbeispiele**
Operatives Durcharbeiten von Umkehraufgaben/Aufgaben mit Parametern	Umkehrfrage	Wann kommt … heraus?	• Gib fünf Zahlen an, deren Durchschnitt 5 ist. • Gib zwei weitere Beispiele an. • Wie oft muss man noch die Zahl 5 zu den Zahlen 1, 2, 3, 4 hinzunehmen, damit der Durchschnitt 4 ist?
	Optimierung	Wann ist … am größten/kleinsten/besten?	• Du hast die drei Datenreihen: 1, 1, 8 3, 3 1, 2, 3, 4, 5 Bei welcher der drei erhöht sich der Durchschnitt am meisten, wenn man noch eine 6 hinzunimmt? Warum?
	Funktionale Abhängigkeit	Was passiert wenn …?	• Was ändert sich am Durchschnitt der folgenden Zahlenreihe 6, 10, 12, 16, wenn man a) alle Werte halbiert? b) alle Werte um 1 erhöht? c) den Durchschnittswert noch hinzufügt.
	Kombinatorische Ausschöpfung	Wie viele Möglichkeiten gibt es, …? Wie lauten alle Möglichkeiten, …?	• Wie viele verschiedene Durchschnitte kannst du errechnen, wenn du nur die Zahlen 1, 2, 3, 4 und 5 zur Verfügung hast? a) Du darfst jede Zahl höchstens einmal nehmen. b) Du darfst jede Zahl auch mehrfach nehmen. Was ist jetzt der größte und kleinste Wert, den du bekommst?
Spielerisches Auseinandersetzen mit Spielsituationen	Übungsspiel	Spielt miteinander.	• Jeder Mitspieler wirft einen Würfel. Alle werfen zudem noch zusammen 2 Würfel. Nun muss jeder mit Würfeln aus der Mitte sein eigenes Würfelergebnis als Durchschnitt legen.
	Spielanalyse	Findet eine gute Strategie.	• Mit welchen Strategien kann man beim vorigen Spiel einfache Lösungen finden? Wie findet man weniger nahe liegende Lösungen?
Eigene Aufgaben erarbeiten mit Musteraufgaben	Variieren	Verändere die Aufgaben (Welche kannst du noch ebenso bearbeiten, welche nicht? Warum?)	• „Wie kann man mit zehn Würfelergebnissen den Durchschnitt 4, 5 erhalten?“ – Löse die Aufgabe, verändere sie und untersuche, welche Varianten noch lösbar sind.

Aufgabentyp: **Strukturen reflektieren**	**Fragetyp**		**Aufgabenbeispiele**
Muster erkennen und erzeugen in strukturierten Aufgabenserien	Muster suchen	Welche Muster kannst du entdecken?	• Bilde die Durchschnitte der folgenden Datenreihen: 10, 11, 12, 13, 14 1, 12, 13, 14, 15 Welche Besonderheiten oder Zusammenhänge kannst du erkennen? Kannst du deine Beobachtungen begründen?
	Muster fortsetzen	Wie lässt sich das Muster fortsetzen?	• Bilde die Durchschnitte der folgenden Datenreihen: 1, 3 1, 3, 5 1, 3, 5, 7 a) Setze die Reihe und berechne die Durchschnitte. b) Erfinde eigene, ähnliche Reihen und berechne sie.
	Analogisieren	Wie lauten ähnliche Aufgaben? (Warum sind sie ähnlich?)	• Bilde die Durchschnitte der folgenden Datenreihen: 3, 4, 7, 8 5, 6, 10, 11 12, 13, 21, 22 Was haben die Aufgaben gemeinsam? Bilde eigene weitere.
Strukturieren von unstrukturierten Aufgabengruppen	Sortieren/ Klassifizieren	Bilde Gruppen … je nach Lösbarkeit/ Typ/…	• Sortiere die folgenden Aufgaben erst in ähnliche Gruppen, bevor du die Durchschnitte berechnest: a) 1, 2, 7 b) 10, 50, 80 c) 31, 33, 37 d) 110, 150, 180 e) 100, 200, 700
	Passung prüfen	Welches Beispiel passt nicht? Warum?	• Welcher Datenreihe passt nicht zu den anderen? Was bedeutet das für den Durchschnitt? a) 5, 10, 15 b) 1, 10, 100 c) 200, 220, 240 d) 5, 8, 11
	Bewerten	Suche die schwierigsten/leichtesten/ ungewöhnlichen heraus	• Suche zunächst die Durchschnitte heraus, die du ohne zu rechnen bestimmen kannst: a) 4, 5, 5, 5, 5, 6 b) 8, 10, 12, 14 c) 4, 6, 10 d) 10, 5, 5, 5, 10 e) 1, 3, 5, 6 f) 11, 12, 14, 15
Argumentieren an gestellten/ gelösten Aufgaben	Muster begründen	Wieso kommt dieses Muster heraus?	• Wie ändert sich der Durchschnitt von Datenreihe zu Datenreihe? Warum? 5, 8, 10, 12 6, 9, 11, 13 7, 10, 12, 14
	Darstellen	Wie kann man die Situation anders darstellen? (grafisch, rechnerisch, …)	• Berechne den Durchschnitt und begründe das Ergebnis am Zahlenstrahl: 1, 3, 5, 10, 12, 14
	Richtigkeit/ Gültigkeit	Welche Aufgabe ist unmöglich/ sinnvoll? Stimmt die Behauptung? Warum?	• „Bei vier Zahlen liegt der Durchschnitt immer zwischen den mittleren beiden“ – Stimmt das? Begründe oder widerlege.
	Fehler finden	Was ist hier falsch? Warum? Wie kann man es besser machen?	• „Der Durchschnitt von 1, 2, 3, 4, 5 ist 3. Wenn jetzt noch eine 5 dazukommt, wird der Durchschnitt um 1 größer.“ Prüfe und begründe.

Aufgabentyp: Anwendungen erkunden	Fragetyp		Aufgabenbeispiele
Anwenden auf Beispielsituationen/ Sachsituationen	an Beispielen anwenden	Wende … bei der Bearbeitung folgender Situationen an.	• Michaela ist beim Weitsprung 2,30 m und 2,45 m gesprungen. Wie möchte auf einen Durchschnitt von 2,40 m in drei Sprüngen kommen.
	Anwendbarkeit reflektieren	Kann man … hier anwenden. Warum (nicht)?	• Welche Durchschnitte von zwei Personen kann man nicht bilden, auch wenn man alle Daten kennt? Warum? a) die Körpergröße b) die Augenfarbe c) das Taschengeld d) das Geburtsdatum
	Anwendungen erfinden	Erfinde weitere Situationen, in denen du … anwenden kannst.	• Setzt euch zu viert zusammen und sammelt Daten, die ihr von euch allen vieren kennt. Bildet alle möglichen Durchschnitte.
Vernetzen mit verwandten Begriffen/ Situationen	Verbindungen erfassen	Wie passt das zu …?	• Kann man vergleichen, wie gut zwei Länder im Durchschnitt bei den Olympischen Spielen abschneiden? Mache Vorschläge.
	Verbindungen suchen	Wo hast du … schon einmal gesehen/gemacht?	• Suche eine Woche lang in der Zeitung, wo Durchschnitte gebildet werden. Erkläre deine Beispiele.
	Übertragen	Wie lässt sich … auf … übertragen.	• Wie würdest du deine Durchschnittsgröße oder dein Durchschnittsalter in diesem Kalenderjahr berechnen?

Eine didaktisch und mathematisch dankbare Tätigkeit

Intelligentes Üben hat nach den vorangegangenen Ausführungen einen echten Mehrwert für die Lernenden – und ganz nebenbei für die Lehrenden. Denn Aufgabenkonstruktion ist mehr als langweiliges Alltagsgeschäft. Wenn Sie sich erst einmal darauf eingelassen haben, werden Sie feststellen, dass Sie im doppelten Sinne wieder zum Forscher werden:

- zum pädagogischen Forscher, denn Sie erkunden den didaktischen Gehalt ihrer Übungsaufgaben
- zum mathematischen Forscher, denn oft geht das Konstruieren von Aufgaben einher mit mathematischen (Wieder)entdeckungen.

Hier nur zwei Beispiele:

Beispiel 1: Sie möchten, dass Schülerinnen und Schüler die Quadratzahlen und Primzahlen memorieren. Dazu überlegen Sie sich, dass die Schüler möglichst oft mit Quadratzahlen und Primzahlen operieren. Sie nutzen die Technik „*Erfinde Aufgaben … mit den Lösungen …*“, die Ihnen problemorientierte Übungsaufgaben erzeugt. Zum Beispiel:

Suche möglichst viele Lösungen zu der Aufgabe:

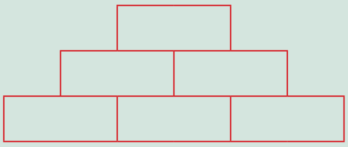
$\square + \square = \square$

Dabei sollen in den Kästen nur Primzahlen oder Quadratzahlen stehen.

Die Schüler werden hier sicher nicht die gesamte Lösungsvielfalt ausschöpfen. Denken Sie zunächst einmal selbst über mögliche Lösungen nach! Vielleicht erinnern Sie sich an die pythagoreischen Zahlentripel und daran, dass mit Kubikzahlen hier kein Ergebnis zu erzielen ist. Wie aber lauten *alle* Lösungen zu Primzahlen? Welche Primzahlen sind die Summe von Quadratzahlen? Welche Quadratzahlen unterscheiden sich um eine Primzahl?

Vielleicht lautete eine andere Aufgabenvariante aus Ihrer Werkstatt auch so: Sie haben sich daran erinnert, dass eine gelöste Aufgabe auch eine Zahlenmauer sein kann:

Fülle diese Pluszahlenmauer mit möglichst vielen Quadratzahlen



Gibt es überhaupt eine Lösung mit 6 Quadratzahlen? Die Schüler können hier mehr oder weniger systematisch probieren und sich dabei Quadratzahlen einprägen. Sie selbst werden nachdem Sie diese Aufgabe ersonnen haben, wahrscheinlich den Stift nicht so schnell beiseite legen und nach Quadratzahlgruppen suchen, für die $a^2+b^2=d^2$, $b^2+c^2=e^2$ und $d^2+e^2=f^2$. Gibt es solche „pythagoräischen Zahlen-tripel-tripel“ überhaupt?

Beispiel 2: Sie versuchen eine Aufgabe zu erstellen, bei denen Schüler Wurzel ausreduzieren sollen. Sie wenden die Technik „Welche Muster kannst du entdecken?“ an und erzeugen damit eine Reflexionen anregende Übungsaufgabe. Aber welche Muster könnten das sein? Zum Beispiel könnten bestimmte Aufgaben immer dieselbe Lösung besitzen. Wie finden Sie alle möglichen Wurzelterme mit demselben Wert, also z. B.: $\sqrt{12}+2\sqrt{3}$, $\sqrt{48}$, $4\sqrt{3}$? Gibt es Werte, bei denen sich so keine drei Terme erzeugen lassen? Gibt es Terme, denen man die Gleichwertigkeit nicht sofort ansieht? Wollen Sie auch nicht weiter reduzierbare Terme untermischen, also z. B. $\sqrt{2}+\sqrt{3}$? Welche Verwandten haben diese? Zum Beispiel $\sqrt{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2}=\sqrt{5+2\sqrt{6}}$), ein Term, dem man seine Reduzierbarkeit nicht unbedingt ansieht. Kann man auch einen solchen Term mit der noch schöneren Form $\sqrt{a+\sqrt{b}}$ bilden, bei dem a und b nicht mehr reduzierbar sind, wohl aber der ganze Term?

Ganz schnell geraten Sie in den Sog eigener mathematischer Erkundungen. Und auch wenn Sie ihre Schüler nicht den ganzen Weg mitnehmen wollen, so verschaffen Ihnen solche Erkundungen Hintergrundkenntnisse und Sicherheit und für den täglichen Unterricht, wenn Sie etwa einmal ein Beispiel aus dem Stegreif erzeugen wollen. Und sogar in die Übungsaufgabe, deren Konstruktion ja Ihr ursprüngliches Ziel war, können Sie solche Erfahrungen einmischen:

Suche unter diesen Wurzelausdrücken viele gleichwertige Ausdrücke (ohne Taschenrechner)

$\sqrt{48}$	$\sqrt{12}+2\sqrt{3}$	$4\sqrt{3}$
$\sqrt{5+\sqrt{24}}$	$\sqrt{2}+\sqrt{3}$	$\sqrt{4}\,\sqrt{8}$

Zum Schluss

Intelligentes Üben darf nicht beschränkt sein auf Ausnahmesituationen oder Ausnahmeschüler, sondern kann grundsätzlich verwirklicht werden. Es gibt nur ganz wenige Stellen im Unterricht, wo auch einmal das reine Fertigkeitstraining angebracht ist (z. B. beim Kopfrechnen). Intelligentes Üben ist in einem auf Verstehen ausgerichteten Mathematikunterricht möglich und notwendig für alle Schülerinnen und Schüler.

Glücklicherweise lassen sich intelligente Übungen mit etwas Hintergrundwissen und Handwerkszeug (und ein wenig Kreativität) selbst erstellen. Dabei lernt man als Lehrer sogar noch etwas über seine didaktischen Ziele und womöglich sogar über Mathematik.

So kann man (sich) fortbilden …

Das Erarbeiten von Übungsaufgaben kann man im Prinzip im „Selbststudium" betreiben. Wichtig ist, dass man seine „Produkte" auch in den Klassenraum trägt und ausprobiert – und nicht das Handtuch wirft, wenn es einmal nicht so funktioniert, wie man es sich gewünscht hätte.

Noch ergiebiger und freudvoller ist es aber, gemeinsam produktive Übungsaufgaben zu entwickeln, etwa im Rahmen einer Fortbildung oder in einer kleinen Arbeitsgruppe von Gleichgesinnten an der eigenen Schule. Wenn man dabei die Erfahrungen und Ergebnisse austauscht, entsteht eine echte Arbeitserleichterung und eine schöne Materialsammlung, die das Schulbuch ergänzen kann.

Ein Kardinalfehler, dem Arbeitsgruppen allerdings immer wieder erliegen, ist der Versuch *im gemeinsamen Gespräch* Aufgaben zu entwickeln. Es entfalten sich dabei alle Untugenden einer Gruppenarbeit: Einer prescht vor und dominiert die anderen, gute Ideen bleiben auf der Strecke, weil sie zu früh bewertet werden oder weil in der Kommunikation die Ideen zu schnell kanalisiert werden. Um dies zu verhindern kann man eine weitere Kreativitätstechnik einsetzen:

- Erlaube dem Einzelnen zunächst allein möglichst bewertungsfrei Ideen anzuhäufen.
- Erst wenn genug „kreative Substanz" zusammengetragen ist, kann man diesen sichten und weiter entwickeln.

Bewährt hat sich hier etwa die „Ich-Du-Wir"-Methode, die in irgendeiner geeigneten Variante angewendet werden kann (vgl. Barzel/Büchter/Leuders 2007)

„Ich-Du-Wir"-Methode		
0. Problem Stellen	Die Gruppe einigt sich auf ein Ziel, das hinreichend offen und zugänglich ist (oder ein Teilnehmer gibt ein solches Ziel vor).	Gruppe
1. ICH-Phase:	Anschließend überlegt zunächst Jeder und Jede *für sich* mögliche Ideen zur Lösung und notiert diese.	Einzeln
2. DU-Phase:	Die Ideen werden mit einem Partner ausgetauscht und besprochen. Dabei können die Ansätze verglichen, Irrwege besprochen und offene Fragen festgehalten werden.	Partner
3. WIR-Phase:	Die Paare präsentieren ihre Ergebnisse vor der Gruppe. Verschiedene Wege werden verglichen und besprochen.	Gruppen

Ich-Du-Wir fördert zunächst eine intensive individuelle Auseinandersetzung mit einem Problem und ist dadurch einer unmittelbar einsetzenden Arbeit in der Gruppe überlegen. Im geschützten Rahmen können dann die noch unfertigen Ideen geäußert und besprochen werden. Für die gesamte Gruppe gewährleistet die Methode, dass viele verschiedene Ansätze zum gestellten Problem zusammengetragen werden.

Eine weitere, verwandte Methode, die die Ich-Du-Wir-Idee umsetzt, ist das Schreibgespräch:

Schreibgespräch		
0. Vorbereiten	Die Aufgabe wird gestellt, die Details des Ablaufs (Übergabeformen, Zeiten, Ende) werden vereinbart, z. B. alle 5 Minuten den Zettel an den Nachbarn.	Gruppe
1. Schreiben	Jeder beginnt mit einem leeren Blatt und notiert erste Ideen zur Aufgabe. Nach einer gewissen Zeit (oder nach Belieben der Teilnehmer) werden die Blätter weitergereicht. Der Empfänger liest das Geschriebene und arbeitet an der Stelle weiter. Mündliche Gespräche (auch Rückfragen) sind nicht erlaubt.	Partner oder Gruppe
2. Auswerten	Die Gruppe diskutiert die verschiedenen Bearbeitungen. Man kann z. B. die letzte Fassung zusammenfassen, bewerten, sich auf eine einigen, Ideen gegenüberstellen usw.	Partner oder Gruppe

Solche Techniken zur gemeinsamen Arbeit führen zu einer Steigerung von Kreativität, Kooperativität und Produktivität – bei der Arbeit in Lehrergruppen, aber natürlich auch bei Schülerinnen und Schülern im täglichen Mathematikunterricht.

Zum Weiterdenken und -arbeiten …

… mit der DVD

- Einige Artikel zum Produktiven Üben
- Eine Powerpoint-Präsentation zur Verwendung als Fortbildungsimpuls
- Kopiervorlagen mit Prüffragen und Tabelle
- Exemplarische Ergebnisse aus Lehrerfortbildungen

… mit der Literatur

Barzel, B./Büchter, A./Leuders, T. (2007): Mathematik-Methodik. Cornelsen-Scriptor, Berlin.

Blum, W./Wiegand, B. (2000): Vertiefen und Vernetzen – Intelligentes Üben im Mathematikunterricht, in: Üben & Wiederholen, Friedrich Jahresheft XVII, S. 106–108.

Bruder, R. (2008): Üben mit Konzept. Mathematik lehren 131.

Büchter, A./Leuders, T. (2005): Mathematikaufgaben selbst entwickeln. Cornelsen Scriptor, Berlin. S. 144–149.

Hengartner, E. (2004): Lernumgebungen für Rechenschwache bis Hochbegabte: Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht. In: Zeitschrift Grundschulunterricht 2/2004, S. 11–14, s. a. http://www.mathe-projekt.ch/

Leuders, T. (2005): Intelligentes Üben selbst gestalten! – Erfahrungen aus dem Mathematikunterricht. Pädagogik, 11/05, S. 29–32.

Leuders, T. (2006): Reflektierendes Üben mit Plantagenaufgaben. Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht 59(5), S. 276–284.

Leuders, T. (2008): Übungsaufgaben produktiv weiterentwickeln. Tipps und Kniffe am Beispielthema „Römische Zahlen" Mathematik lehren 147.

Leuders, T./Wittmann, G. (2006): Fit in Form – Produktives Üben in der Geometrie. Praxis der Mathematik in der Schule 12.

Müller, J. (2005): Entdeckend Lernen mit Zahlenmauern in der Sekundarstufe. Praxis der Mathematik in der Schule 2/05, S. 32–38.

Schupp, Hans (2002): Thema mit Variationen – Aufgabenvariation im Mathematikunterricht, Verlag Franzbecker, Hildesheim.

Selter, Chr. (1995): Entdeckend üben – übend entdecken Grundschule 27, 5/1995, S. 30–34.

Winter, H. (1984): Begriff und Bedeutung des Übens im Mathematikunterricht. Mathematik Lehren 2/84, S. 4–16.

Wittmann, E. Chr./Müller, G. N. (1990/1992): Handbuch produktiver Rechenübungen, Band 1 & 2, Klett, Stuttgart.

Prof. Dr. Timo Leuders
Pädagogische Hochschule Freiburg
leuders@ph-freiburg.de